

“Determinación del punto óptimo para la creación de una nueva torre de telecomunicaciones en la zona de Rio Frio, Sarapiquí, Heredia, Costa Rica, mediante la elaboración de un Diagrama de Voronoi”

I. Introducción

Debido a los cambios drásticos que hemos sufrido a causa de COVID-19, surge un agente unificador en los tiempos de lejanía; Las torres de telecomunicaciones, que, mediante ondas magnéticas, nos brindan internet. Sin embargo, esta demanda de servicios necesita la construcción de otras torres que funcionen de soporte, puesto que una sola torre colapsaría intentando procesar los requisitos de todos los usuarios de una región (Access Partnerships, 2021; IBIS, 2021). Por ejemplo, hace unos meses hubo un colapso en el servicio de internet en una región Heredia, Costa Rica. Mientras investigaba sobre ese fenómeno, me di cuenta que el problema se encontraba en que las torres de telecomunicaciones existentes, no cubrían la demanda de la región. De esa necesidad, surge mi **objetivo de investigación**, el cuál es determinar la ubicación óptima para la construcción de una torre de telecomunicaciones en la zona de Rio Frio, Sarapiquí, Heredia, Costa Rica, mediante la construcción de un diagrama de Voronoi. Asimismo, la **importancia de este trabajo** radica en ofrecer *una sugerencia* a los proveedores de internet sobre la zona más adecuada para brindar sus servicios a la población de Rio Frío, sustentada con procedimientos matemáticos.

Para la recolección de datos, caminé alrededor de la zona de estudio y anoté las 6 torres de telecomunicación ubicadas en esa zona, y se anotaron en Google Maps. Luego, se trasladó el mapa digital a un plano cartesiano utilizando el software GeoGebra, y se ubicaron las torres utilizando puntos. Se hallará las mediatrices de los diferentes segmentos para seccionar las torres, construyendo un diagrama de Voronoi, y, finalmente, evaluar mediante distintos métodos, cuál vértice es el óptimo para la construcción de una torre de telecomunicaciones.

II. Procedimientos y resultados

Pares ordenados de cada punto

Mediante un mapa con imagen satelital, con una escala de 500m (Google, s.f.), se identifican los puntos, y se rotulan adecuadamente (Torre A, Torre B...) (figura 1). Asimismo, se



utilizó el software GeoGebra para procesar la imagen digital del mapa con una escala ajustada a 500 m, y ubicar los puntos en el plano cartesiano. De esta manera, los pares ordenados (x, y) se pueden observar en la tabla 1.

Siendo el punto "A" la representación de "Torre A", punto "B" representa a "Torre B", y, así con los demás puntos.

Tabla 1

Coordenadas de los puntos, según Geogebra.

Punto	Coordenada (x, y)
A	(9.49, 12.70)
B	(16.05, 14.68)
C	(20.28, 12.10)
D	(28.23, 18.65)
E	(27.90, 10.05)
F	(30.80, 6.08)

Los pares ordenados sirven para calcular las mediatrices de cada segmento, y con ellas, formar los límites de las celdas en un diagrama de Voronoi.

Nota: Durante los cálculos utilizaré los valores completos que, GeoGebra, y la calculadora gráfica Ti-84 plus, brindan. Sin embargo, al redactar la ecuación de la mediatriz los redondeo a 2 lugares decimales, puesto que, este nivel de precisión, es adecuado para el papel y regla milimetrado utilizado para **dibujar el diagrama**.

Reflexión 1.

Debido a que no tenía acceso a documentos oficiales sobre la ubicación de las torres, como un plano municipal con dichas coordenadas, decidí tomar caminatas por la zona de estudio, y, de esa manera, identificar cada una de las torres presentes. Sin embargo, este método de recolección está limitado por mi visión, puesto que, si existe alguna torre dentro de una propiedad privada a la cual no tengo acceso, y tampoco se pude visualizar, la relevancia de mis conclusiones es reducida, pues no se tomó en cuenta dicha torre en el diagrama. Aun así, para reducir el impacto de esta limitación, el proceso de recolección duró una semana, para comprobar que no olvidé alguna torre.

Cálculo de las ecuaciones de las mediatrices

A continuación, se realizan los cálculos pertinentes en los segmentos **AB** y **AC**. Véase apéndice para los cálculos de los otros segmentos. Para calcular la ecuación de la mediatriz de los segmentos, primero necesito calcular el **punto medio (PM)** de cada segmento, ya que en este punto la recta biseca el segmento. Se calcula mediante la siguiente fórmula. Siendo los pares ordenados del segmento P_1P_2

$$P_1(x_1, y_1) \quad P_2(x_2, y_2)$$
$$PM = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

- Cálculo del Punto medio del segmento **AB**

$$A(9.49, 12.70) \quad B(16.05, 14.68)$$

$$PM = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$PM = \left(\frac{9.49 + 16.05}{2}, \frac{12.70 + 14.68}{2} \right)$$

$$PM = (12.77, 13.69)$$

- Cálculo del Punto medio del segmento AC

$$A (9.49, 12.70) \quad C (20.28, 12.10)$$

$$PM = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$PM = \left(\frac{9.49 + 20.28}{2}, \frac{12.70 + 12.10}{2} \right)$$

$$PM = (14.885, 12.4)$$

Seguidamente, se calcula **la pendiente** de cada segmento (M_1), con el propósito de obtener la pendiente de la bisectriz (M_2), siendo $M_1 \perp M_2$. Se calcula M_1 y M_2 mediante la siguiente fórmula:

$$M_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$M_1 = a$$

$$M_2 = \frac{-1}{a}$$

- Cálculo de M_1 y M_2 del segmento AB

$$M_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$M_1 = \frac{14.68 - 12.70}{16.05, 9.49}$$

$$M_1 = 0.3018292683$$

$$M_2 = \frac{-1}{a}$$

$$M_2 = -3.31313$$

- Cálculo de M_1 y M_2 del segmento AC

$$M_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$M_1 = \frac{12.10 - 12.70}{20.28, 9.49}$$

$$M_1 = -0.0553505535$$

$$M_2 = \frac{-1}{a}$$

$$M_2 = 18.06667$$

A continuación, se calcula la intersección de la bisectriz con el eje “Y” (b), el cual se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$b = y - M_2x$$

Siendo:

y : Ordenada del punto medio del segmento

M_2 : Pendiente de la bisectriz del segmento

x : Abscisa del punto medio del segmento

- Cálculo de b del segmento AB

$$b = y - M_2x$$

$$b = (13.69) - (-3.31313)(12.77)$$

$$b = 55.9986701$$

- Cálculo de b del segmento AC

$$b = y - M_2x$$

$$b = (12.4) - (18.06667)(14.885)$$

$$b = -256.52238295$$

Finalmente, se escribe **la ecuación de la mediatriz** en la forma $y = M_2 + b$ del segmento.

- Ecuación de la mediatriz de AB

$$y = M_2 + b$$

$$y = -3.31313x + 55.9986701$$

$$y = -3.31x + 55.10$$

- Ecuación de la mediatriz de AC

$$y = M_2 + b$$

$$y = 18.06667x - 256.52238295$$

$$y = 18.07x - 256.52$$

Tabla 2

Ecuaciones de mediatriz de los demás segmentos redondeado a 2 lugares decimales

SEGMENTO	ECUACIÓN DE MEDIATRIZ
BD	$y = -0.48x - 0.59$
BC	$y = 1.64x - 16.39$
CE	$y = 3.72x - 78.47$
CD	$y = -1.21x + 44.81$
DE	$y = -0.04x + 15.27$
EF	$y = 0.73x - 13.37$
DF	$y = 0.20x + 6.33$

Con base a los resultados anteriores, se construyó un diagrama de Voronoi (Figura 2). Asimismo, mediante GeoGebra, se identificaron las coordenadas de los vértices obtenidos (Tabla 2).

Tabla 2

Coordenadas de los vértices, según GeoGebra

VÉRTICE	COORDENADA (x, y)
I	(14.61, 7.5)
J	(21.6, 18.6)
K	(21.84, 2.7)
L	(25.17, 14.46)
M	(37.57, 4.62)

Análisis de los vértices obtenidos de Voronoi

En la Figura 2, se observa que el diagrama de Voronoi presenta 5 vértices, los cuales *suponen posibles puntos* en los que se pueden construir las torres de telecomunicación. Sus

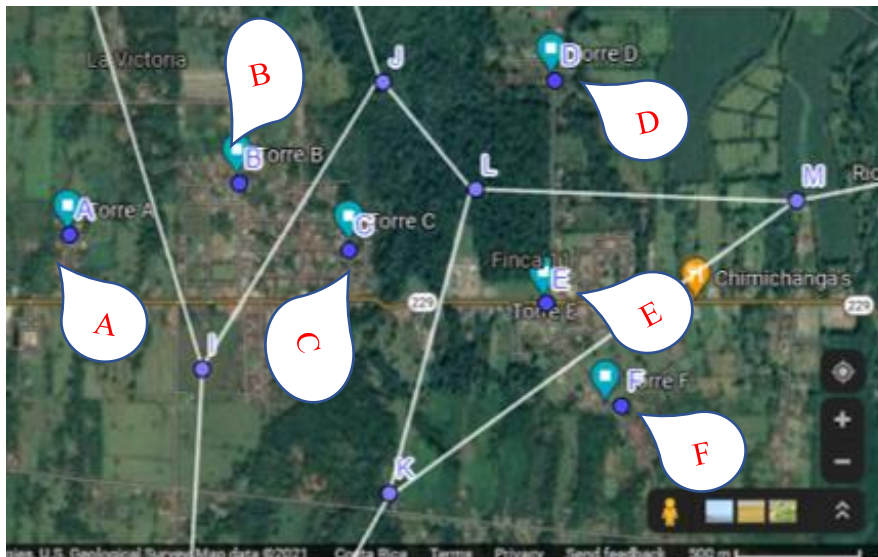


Figura 2. Visualización de los vértices y mediatrices del Diagrama Voronoi

coordenadas se encuentran en la tabla 2. Sin embargo, algunos de estos vértices están localizados en zonas donde no hay comunidades, y están rodeados por árboles, lo que impediría una correcta destrucción de las señales

de telecomunicaciones. Estos puntos son: **J, L y M**, por lo tanto, colocar torres en estos puntos, no tendría mucho impacto en los usuarios, además, sería un gasto de recursos humanos y económicos.

Por otro lado, los vértices **I y K**, aunque no están ubicados en una zona poblada, están *visualmente*

más cerca a vecindarios. **I** está cerca de una urbanización, y **K** esta, aunque no aparezca por completo en el mapa, cerca de un pequeño pueblo, por lo tanto, ambos vértices cumplen con el propósito de ofrecer internet a una amplia variedad de usuarios. Pero, **¿cuál es el punto óptimo para construir una torre de telecomunicaciones? ¿qué criterios o métodos puedo utilizar para determinarlo?**

Reflexión 2.

Al obtener estos resultados, en realidad pensé en cambiar a un mapa más amplio, o un lugar con mayor densidad poblacional, debido a que la zona de estudio es pequeña y no abarca muchas áreas de desarrollo. Sin embargo, al pensar en el desarrollo que las comunidades han tenido al ser expuestas a un acceso rápido de internet, y demás servicios de telecomunicaciones (Access Partnerships, 2021), decidí continuar con la investigación, puesto que, la posibilidad de incrementar el desarrollo de la zona es una implicación en el mundo real que motiva mi trabajo.

Determinación del punto óptimo

Antes de pensar en qué métodos utilizar, surge la pregunta ¿por qué los puntos B-C, y E-F, los cuales están dentro de las dos zonas más pobladas en el mapa, están tan cerca? Una explicación sería que una sola torre no satisface las necesidades de los usuarios, por lo que fue imprescindible construir otra. Lo anterior, indica que no solo yo experimenté problemas de conexión, sino que otras personas también, lo que sugiere que hubo un tráfico muy grande de datos en las torres, lo que ocasionó que el servicio decayera. Con base a la situación anterior, construir una torre lo más alejada de otras, no contribuiría a los problemas de conexión de los usuarios. Pero, si la torre esta cerca de otras torres, se crearía un sistema integrado de telecomunicaciones, lo que liberaría ancho de banda en las torres que proveen internet, mejorando la conectividad a la red de los usuarios.

Cálculo de la distancia entre puntos.

A partir de lo anterior, utilizaré la fórmula de **distancia entre puntos** (d) para definir cuál punto, si I o K, está más cerca de otros puntos. Debido a que I y K son vértices, estos son equidistantes a los puntos A, B, y C, y C, E, y F, respectivamente, por lo tanto, con determinar una distancia entre cualquiera de los puntos y los vértices, estos tendrían las mismas medidas. Por lo tanto, solo se aplicará la fórmula a los segmentos AI y KF . La fórmula de distancia entre puntos es la siguiente:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- Cálculo de d del segmento AI .

$$A (9.49, 12.70) \quad I (14.61, 7.5)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(14.61 - 9.49)^2 + (7.5 - 12.70)^2}$$

$$d = 7.297561236$$

- Cálculo de d del segmento KF

$$K (21.84, 2.7) \quad F (30.80, 6.08)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(30.80 - 21.84)^2 + (6.08 - 2.7)^2}$$

$$d = 9.576324974$$

Discusión de los resultados de distancia entre puntos.

A raíz de los resultados anteriores, se obtiene que K presenta una distancia a las torres más cercanas de 9.58, redondeado a 2 espacios decimales, mientras que I presenta una distancia a las

torres más cercanas de 7.30, redondeado a 2 espacios decimales. Debido a que la diferencia es de solo 2 unidades, se utilizará un análisis cualitativo, mediante la observación del relieve en el mapa y la concentración de árboles. Por un lado, “I” está ubicado en una zona de ganadería, por lo que es una tierra plana y sin árboles, por lo tanto, la transmisión de señal es más rápida y directa.

Por otro lado, “K” se encuentra en frondosa, lo cual es evidente por la acumulación de un tono verde más fuerte, lo cual limitaría el transporte de señal, además, si se construye en vértice “K”, este manejaría por sí solo la transmisión de señal, por lo que es más propenso a un exceso de tráfico de datos, sin embargo,

en la zona de “K” no hay otras torres, por lo que si se construye la torrea ahí, podrían surgir clientes nuevo. Tomando en cuenta los puntos anteriores, tales como la distancia a la torre más cercana, y la transmisión



Figura 3. Visualización de las circunferencias de vértices I y K.

de señal, se selecciona el vértice I como el punto óptimo para construir una torre de telecomunicaciones en la zona de Rio Frio, Sarapiquí, Heredia, Costa Rica.

Asimismo, se aplicó un método de análisis visual sobre la distancia mediante GeoGebra. Generé dos circunferencias utilizando los vertices I y K como centro, y las coloqué en el primer punto que la circunferencia tocara el punto más cercano (Figura 3). Este método me permitió, uno, representar gráficamente la distancia entre los puntos, por ende, mejorando mi comprensión, y dos, contemplar visualmente el área que ambas torres deberían cubrir. Por ende, aunque K presente un área más amplia, esta abarca menos poblaciones, en contraste a I, que abarca más usuarios.

Reflexión 3.

Esta sección fue sumamente gratificante ya que tuve que analizar el diagrama, no solo considerando los puntos en el plano, sino también el relieve que presenta la zona, los agentes que limitan la eficiencia de las torres de telecomunicaciones, al igual que deducir las zonas de mayor concentración de usuarios, basándome, tanto en una imagen satelital, como la posición de las torres.

En cuanto al método que utilicé, hay ciertas limitaciones que disminuyen el impacto del trabajo. Por ejemplo, el basarme en el relieve presente en el mapa, y no utilizar medida topográficas oficiales, reduce la fiabilidad de aceptar el punto I como la ubicación óptima, sin embargo, no tenía acceso a dichos documentos, por lo que utilizar el mapa satelital fue la opción más viable que tenía. Asimismo, en cuanto al programa utilizado para hacer las visualizaciones, GeoGebra, fue una herramienta muy útil y sencilla de representar los cálculos realizados.

Construcción del Diagrama de Voronoi con nuevo punto

Finalmente, se procede a calcular **las ecuaciones de las mediatrices** faltantes para completar el diagrama de Voronoi con el nuevo punto I, siendo este, la sugerencia del punto óptimo para construir una nueva torre de telecomunicaciones. A continuación, se realizan los cálculos pertinentes en el segmento *AI*. Véase apéndice para los cálculos de los otros segmentos.

Se calcula el Punto medio (PM) del segmento *AI*, para identificar un punto de la mediatriz.

$$A (9.49, 12.70) \quad I (14.61, 7.5)$$

$$PM = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$PM = \left(\frac{9.49 + 14.61}{2}, \frac{12.70 + 7.5}{2} \right)$$

$$PM = (12.05, 10.10)$$

Luego, se calcula M_1 y M_2 del segmento AI , para determinar la pendiente de la mediatriz.

$$M_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$M_1 = \frac{7.5 - 12.70}{14.61 - 9.49}$$

$$M_1 = -1.015625$$

$$M_2 = \frac{-1}{a}$$

$$M_2 = 0.9846153846$$

Se calcula b del segmento AI , para determinar la intersección de la mediatriz con el eje "Y"

$$b = y - M_2x$$

$$b = (10.10) - (0.9846153846)(12.05)$$

$$b = -1.76461538443$$

Se escribe la Ecuación de la Mediatriz

$$y = M_2 + b$$

$$y = 0.9846153846x - 1.76461538443$$

$$y = 0.98x - 1.76$$

Debido a que solo estamos agregando un punto, solo se presentarán las nuevas ecuaciones creadas.

Tabla 3

Ecuaciones de mediatriz de los demás segmentos redondeado a 2 lugares decimales

Segmento	Ecuación	Segmento	Ecuación
IB	$y = 0.20x + 14.16$	IC	$y = -1.23x + 31.31$
IF	$y = -0.09x + 8.78$		

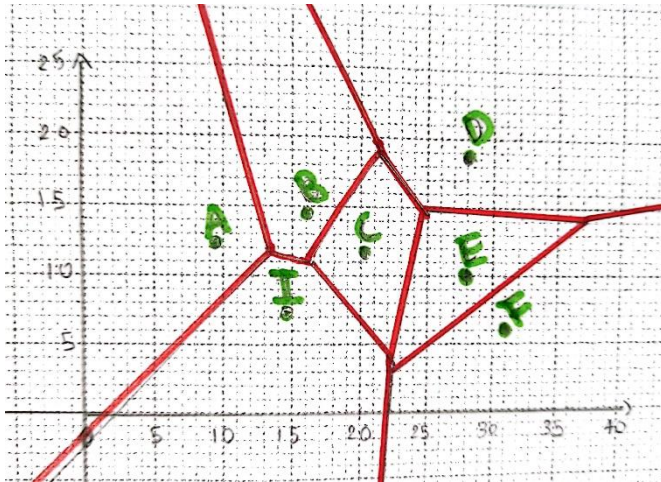


Figura 4. Diagrama de Voronoi con punto “I” incluido.

La figura 4 es el diagrama de Voronoi dibujado en papel milimetrado, donde cada cuadrito equivale a 5.

Conclusión y Reflexión

En conclusión, se determina el vértice “I” como el punto más adecuado para construir una torre de telecomunicaciones. Por ende, se cumplió con el objetivo del proyecto, ya que se determinó la ubicación óptima de dicha torre, mediante la construcción de un diagrama de Voronoi. Esta construcción conllevó calcular las mediatrices de los segmentos presentes en el plano. Aun así, el diagrama solo me permitió encontrar los puntos óptimos en 2 dimensiones, por ende, para evaluar la eficiencia de las construcciones en las posibles ubicaciones, analicé la situación con base a factores físicos, y dentro de un plano de 3 dimensiones. Por lo tanto, se evaluaron situaciones que podrían afectar la torre de telecomunicaciones, como la concentración de árboles, ya que afecta la transmisión de señal. Al final, 2 vértices presentaron características adecuadas, por lo que se procedió al cálculo de la distancia entre puntos, buscando la distancia más pequeña.

En cuanto al método de selección de puntos, esta es una prueba cualitativa que se hace mediante la vista, por lo que no es completamente fiable. Por ejemplo, el punto “I” fue seleccionado

debido a que abarca un **área con mayor construcción de casas**. Por ello, se podría considerar una selección subjetiva, reduciendo la confiabilidad de la decisión. Aun así, considerando que las zonas pobladas presentan una mayor demanda de internet (Access Partnerships, 2021), la elección de un punto cercado a una zona de ese tipo, es un **criterio** importante para la construcción de la torre, pues representa un interés económico para una empresa.

Asimismo, una manera de expandir este proyecto, podría ser ampliar el conocimiento sobre la demanda de internet o el nivel de satisfacción con la velocidad de este, mediante una encuesta, y, de esa manera, se selecciona el punto con base a área que presente más problemas de conexión. Similarmente, existen muchos tipos de torre, por ende, se podría expandir el mapa seleccionando torres con características específicas, y determinar, mediante un diagrama de Voronoi, el punto óptimo para construir una torre. Adicionalmente, utilizar un programa que contemple aspectos 3D, o algún simulador, podría ser utilizado para evaluar el efecto de las limitaciones físicas, y, por ende, evaluar la factibilidad de construir en otros vértices.

Mientras investigaba, descubrí diversas maneras en la que los diagramas de Voronoi son aplicados en el área de las ciencias naturales. La naturaleza del diagrama de Voronoi se basa en dividir el espacio de acuerdo a la cercanía de puntos en él. En ecología, por ejemplo, esa división ayuda estudiar el crecimiento de bosques, pues los puntos se basan en la competición de crecimiento en las plantas (Dobrin, s.f.). Este proyecto matemático ha sido una gran aventura para mí, ya que he aprendido a utilizar mi entorno físico como un escenario potencial para utilizar las matemáticas, y, si es posible, mejorar mi entorno. Asimismo, el conocimiento y experiencia que me ha dejado el trabajo, posiblemente lo usaré más adelante, ya sea en la universidad, para saciar mi curiosidad, o incluso para ofrecer una sugerencia u opinión sustentando por, la versátil y creativa matemática.

Bibliografía

- Access Partnerships. (2021). Lessons Learned from COVID-19: Perspectives from the Tower Industry. Recuperado de <https://bit.ly/3uP3KZe>
- Aurenhammer, F. y Klein, R. (s.f.). Voronoi diagrams. Deutsche Forschungsgemeinschaft. Recuperado de <https://bit.ly/3FsxuAc>
- Dobrin, A. (s.f.). A review of properties and variations of Voronoi diagrams. Whitman. Recuperado de <https://bit.ly/3Fw4kQr>
- Google. (2021). Ubicación de 6 Torres de Telecomunicación de 229, Heredia, La Victoria a Finca eis, Horquetas, Sarapiquí. Recuperado en Agosto 5, 2021, de <https://bit.ly/3oGjmNF>
- IBIS. (2021, July 13). Telecommunications Infrastructure Construction in Australia trends (2016-2021). Recuperado de <https://bit.ly/3ljm3CP>

Apéndices

Apéndice 1. Cálculos de las mediatrices de los segmentos restantes. Las ecuaciones finales fueron redondeadas a 2 lugares decimales.

Mediatriz BD

<p>Coordenadas</p> <p style="text-align: center;">B (16.05, 14.68) D (28.23, 18.65)</p> <p>PM</p> $PM = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$ $PM = \left(\frac{16.05 + 28.23}{2}, \frac{14.68 + 18.65}{2} \right)$ <p style="text-align: center;">$PM = (22.14, 16.665)$</p>	<p>M_1 y M_2</p> $M = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$ $M_1 = \frac{18.65 - 14.68}{28.23 - 16.05} = 0.325944$ $M_2 = \frac{-1}{a}$ <p style="text-align: center;">$M_2 = -0.48366$</p>
<p>B</p> $b = y - M_2x$ <p style="text-align: center;">$b = (16.665) - (-0.48366)(22.14)$</p>	<p>Ecuación</p> $y = M_2 + b$ $y = -0.48366x - 0.5909150316$ <p style="text-align: center;">$y = -0.48x - 0.59$</p>

$b = -0.5909150316$	
---------------------	--

Mediatriz BC

<p>Coordenadas</p> <p style="text-align: center;">B (16.05, 14.68) C 20.28, 12.10)</p> <p>PM</p> $PM = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$ $PM = \left(\frac{16.05 + 20.28}{2}, \frac{14.68 + 12.10}{2} \right)$ $PM = (18.165, 13.39)$	<p>M_1 y M_2</p> $M = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$ $M_1 = \frac{12.10 - 14.68}{20.80 - 16.05} = -0.609929078$ $M_2 = \frac{-1}{a}$ $M_2 = 1.63953$
<p>B</p> $b = y - M_2x$ $b = (13.39) - (1.63953)(18.165)$ $b = -16.39206245$	<p>Ecuación</p> $y = M_2 + b$ $y = 1.63953x - 16.39206245$ $y = 1.64x - 16.39$

Mediatriz CE

<p>Coordenadas</p> <p style="text-align: center;">C 20.28, 12.10) E(27.90, 10.05)</p> <p>PM</p> $PM = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$ $PM = \left(\frac{20.28 + 27.80}{2}, \frac{12.10 + 10.05}{2} \right)$ $PM = (24.09, 11.075)$	<p>M_1 y M_2</p> $M = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$ $M_1 = \frac{10.05 - 12.10}{27.90 - 20.28} = -0.2690288714$ $M_2 = \frac{-1}{a}$ $M_2 = 3.71707$
<p>B</p> $b = y - M_2x$ $b = (11.075) - (3.71707)(24.09)$ $b = -78.4692163$	<p>Ecuación</p> $y = M_2 + b$ $y = 3.71707x - 78.4692163$ $y = 3.72x - 78.47$

Mediatriz CD

Coordenadas	M_1 y M_2
-------------	---------------

<p>C (20.28, 12.10) D(28.23, 18.65)</p> <p>PM</p> $PM = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$ $PM = \left(\frac{20.28 + 28.23}{2}, \frac{12.10 + 18.65}{2} \right)$ $PM = (24.255, 15.375)$	$M = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$ $M_1 = \frac{18.65 - 12.10}{28.23 - 20.28} = 0.8238993711$ $M_2 = \frac{-1}{a}$ $M_2 = -0.0383721$
<p>B</p> $b = y - M_2x$ $b = (15.375) - (-1.21374)(24.255)$ $b = 44.8142637$	<p>Ecuación</p> $y = M_2 + b$ $y = -1.21374x + 44.8142637$ $y = -1.21x + 44.81$

Mediatriz DE

<p>Coordenadas</p> <p>D(28.23, 18.65) E(27.90, 10.05)</p> <p>PM</p> $PM = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$ $PM = \left(\frac{28.23 + 27.90}{2}, \frac{18.65 + 10.05}{2} \right)$ $PM = (28.065, 14.35)$	<p>M_1 y M_2</p> $M = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$ $M_1 = \frac{10.05 - 18.65}{27.90 - 28.23} = 26.06060606$ $M_2 = \frac{-1}{a}$ $M_2 = -1.21374$
<p>B</p> $b = y - M_2x$ $b = (14.35) - (-0.0383721)(28.065)$ $b = 15.27342445865$	<p>Ecuación</p> $y = M_2 + b$ $y = -0.0383721x + 15.27342445865$ $y = -0.04x + 15.27$

Mediatriz EF

<p>Coordenadas</p> <p>E(27.90, 10.05) F (30.80, 6.08)</p> <p>PM</p> $PM = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$	<p>M_1 y M_2</p> $M = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$ $M_1 = \frac{6.08 - 10.05}{30.80 - 27.90} = -1.368965517$
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

$PM = \left(\frac{27.90 + 30.80}{2}, \frac{10.05 + 6.08}{2} \right)$ $PM = (29.35, 8.065)$	$M_2 = \frac{-1}{a}$ $M_2 = 0.730479$
<p>B</p> $b = y - M_2x$ $b = (8.065) - (0.730479)(29.35)$ $b = -13.37455865$	<p>Ecuación</p> $y = M_2 + b$ $y = 0.730479x - 13.37455865$ $y = 0.73x - 13.37$

Mediatriz DF

<p>Coordenadas</p> <p>D(28.23, 18.65) F(30.80, 6.08)</p> <p>PM</p> $PM = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$ $PM = \left(\frac{28.23 + 30.80}{2}, \frac{18.65 + 6.08}{2} \right)$ $PM = (29.515, 12.365)$	<p>M_1 y M_2</p> $M = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$ $M_1 = \frac{6.08 - 18.65}{30.80 - 28.23} = -4.891050584$ $M_2 = \frac{-1}{a}$ $M_2 = 0.204455$
<p>B</p> $b = y - M_2x$ $b = (12.365) - (0.204455)(29.515)$ $b = 6.330510675$	<p>Ecuación</p> $y = M_2 + b$ $y = 0.204455x + 6.330510675$ $y = 0.20x + 6.33$

Apéndice 2. Cálculos de las mediatrices de los segmentos del segundo diagrama con nuevo punto

Mediatriz IB

<p>Coordenadas</p> <p>I (14.61, 7.5) B (16.05, 14.68)</p> <p>PM</p> $PM = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$ $PM = \left(\frac{14.61 + 16.05}{2}, \frac{7.5 + 14.68}{2} \right)$	<p>M_1 y M_2</p> $M = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$ $M_1 = \frac{14.68 - 7.5}{16.05 - 14.61} = 4.9861$ $M_2 = \frac{-1}{a}$ $M_2 = -0.200558$
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

$PM = (15.33, 11.09)$	
<p>B</p> $b = y - M_2x$ $b = (11.09) - (-0.200558)(15.33)$ $b = 14.16455414$	<p>Ecuación</p> $y = M_2 + b$ $y = -0.200558x + 14.16455414$ $y = 0.20x + 14.16$

Mediatriz IC

<p>Coordenadas</p> <p>I (14.61, 7.5) C (20.28, 12.10)</p> <p>PM</p> $PM = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$ $PM = \left(\frac{14.61 + 20.28}{2}, \frac{7.5 + 12.10}{2} \right)$ $PM = (17.445, 9.8)$	<p>M_1 y M_2</p> $M = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$ $M_1 = \frac{12.10 - 7.5}{20.28 - 14.61} = 0.81128747$ $M_2 = \frac{-1}{a}$ $M_2 = -1.23261$
<p>B</p> $b = y - M_2x$ $b = (9.8) - (-1.23261)(17.445)$ $b = 31.3088145$	<p>Ecuación</p> $y = M_2 + b$ $y = -1.23261x + 31.3088145$ $y = -1.23x + 31.31$

Mediatriz IF

<p>Coordenadas</p> <p>I (14.61, 7.5) F (30.80, 6.08)</p> $PM = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$ $PM = \left(\frac{14.61 + 30.80}{2}, \frac{7.5 + 6.08}{2} \right)$ $PM = (22.705, 6.79)$	<p>M_1 y M_2</p> $M = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$ $M_1 = \frac{6.08 - 7.5}{30.80 - 14.61} = -0.0877085$ $M_2 = \frac{-1}{a}$ $M_2 = -1.23261$
<p>B</p> $b = y - M_2x$ $b = (6.79) - (-0.0877085)(22.705)$ $b = 8.78142149$	<p>Ecuación</p> $y = M_2 + b$ $y = -0.0877085x + 8.78142149$ $y = -0.09x + 8.78$